Analisi, Primo Esonero (15-11-2019), Prof. Galise-Garroni-Pinzari-Ponsiglione-Siconolfi. **B**

Nome: *Cognome:* *Matricola:*

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1–3: risposta giusta = +2, risposta non data = 0, risposta sbagliata = −1. Esercizi 4–5: punti 0–6. (Totale= 36. Voto ≤ 17 = Non sufficiente $\mapsto$ Scritto primo appello.)

Esercizio 1 Sia $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione.

1. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge assolutamente, allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_{3k}$ diverge. [V] [F]
2. Se $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverge, allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ diverge. [V] [F]
3. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, allora $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi)\, a_k$ converge. [V] [F]
4. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge assolutamente, allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^4$ converge. [V] [F]

Esercizio 2 Per ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. [V] [F]
2. $ne^{a_n} \to \infty$ per $n \to +\infty$. [V] [F]
3. $\{\frac{1}{1+4a_n^2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata. [V] [F]
4. $\frac{1}{n^2}(\sin(a_n)e^{-|a_n|}) \to 0$ per $n \to +\infty$. [V] [F]

Esercizio 3 Per ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente monotona crescente si ha:

1. $\lim_{x\to+\infty} \sin(f(x))$ non esiste [V] [F]
2. Se f è illimitata sia superiormente che inferiormente allora f è iniettiva e $Im(f) = \mathbb{R}$. [V] [F]
3. Esiste $\lim_{x\to 1} \log(|f(x)|)$. [V] [F]
4. Se f è continua $\lim_{x\to 0} f\left(\frac{\log(1-x^2)}{\cos 3x - 1}\right) < f(1)$. [V] [F]

Esercizio 4 Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{se } x \geq 3 \\ -x + c & \text{se } x < 3. \end{cases}$$

A) Determinare per quali $c \in \mathbb{R}$ la funzione f definita sopra è continua.

B) Determinare per quali $c \in \mathbb{R}$ la funzione f definita sopra è monotona.

C) Per $c = 4$ determinare $\sup\limits_{[0,6]} f(x)$ e $\inf\limits_{[0,6]} f(x)$ e stabilire se essi sono rispettivamente massimi e minimi.

Esercizio 5 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita da $a_n := n^2 - 2n + (-1)^n \cos(\frac{n\pi}{8})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

A) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2a_n}{n^{2\alpha} + 2\sin^2(n)}$ è convergente.

B) Determinare se esiste il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$.

C) Stabilire, motivando la risposta, se a_n è definitivamente monotona.